1. Unidad III

Cuestión 1: Seleccione la opción correcta en cada una de las siguientes preguntas. [0 puntos]

Resuelva los siguientes ejercicios sobre la recta presupuestaria, e ilustre con un gráfico detallado sus respuestas. En un supermercado, los precios de los bienes X e Y son S/.8 y S/.10 respectivamente. Un consumidor cuenta con un ingreso de S/.2000 para gastar entre ambos bienes.

(a) (2 points) Grafique la recta presupuestaria y encuentre la cantidad máxima que puede comprar del bien X o del bien Y.

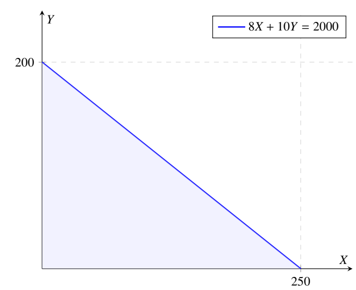
Solution:

Partimos de la Recta Presupuestaria (RP):

$$p_x X + p_y Y = M$$
$$8X + 10Y = 2000$$

Los interceptos son:

- Si $X = 0 \implies Y_{\text{máx}} = \dfrac{2000}{10} = 200$
- Si $Y = 0 \implies X_{\text{máx}} = \dfrac{2000}{8} = 250$



(b) (4 points) Grafique la recta presupuestaria si el ingreso del consumidor aumenta en 25 % e interprete su respuesta.

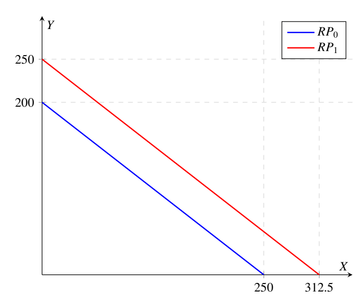
Solution:

$$m' = (1 + 0.25) * 2000 = 2500$$

La nueva RP es $8X + 10Y = 2500$.

- Si $X = 0 \implies Y_{\text{máx}} = \dfrac{2500}{10} = 250$
- Si $Y = 0 \implies X_{\text{máx}} = \dfrac{2500}{8} = 312.5$

Interpretación: Un aumento en el ingreso desplaza la recta presupuestaria paralelamente hacia afuera, ampliando el conjunto de canastas asequibles para el consumidor.



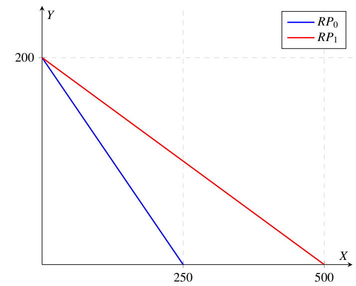
(c) (4 points) ¿Cómo cambia la recta presupuestaria si el precio de X disminuye en 50 %? Ilustre.

Solution:

El nuevo precio de X es $p'_X = 8 \cdot (1 - 0.5) = 4$. La nueva RP es $4X + 10Y = 2000$.

- El intercepto en Y no cambia: $Y_{\text{máx}} = 200$.
- El nuevo intercepto en X es $X_{\text{máx}} = \frac{2000}{4} = 500$.

Interpretación: La recta pivota hacia afuera sobre el intercepto del bien Y. El poder de compra para el bien X aumenta.



Cuestión 2: [0 puntos]
Dada la función de utilidad $U(X,Y) = 2X^{0.5}Y^{0.5}$, el precio del bien X es S/.2, el del bien Y es S/.1 y el ingreso es S/.100.

(a) (4 points) Plantea el problema de optimización y Lagrangeano y sus condiciones de primer orden.

Solution:

Planteamiento General

Se plantea el problema de un consumidor que maximiza la utilidad:

$$U(X,Y) = AX^{\alpha}Y^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

con precios p_X, p_Y y renta m, sujeto a la restricción presupuestaria:

$$p_X X + p_Y Y = m.$$

Lagrangeano

Definimos el lagrangeano general:

$$\mathcal{L}(X,Y,\lambda) = AX^{\alpha}Y^{1-\alpha} + \lambda(m - p_X X - p_Y Y).$$

Condiciones de Primer Orden

Derivando respecto a X, Y y λ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \alpha A X^{\alpha-1}Y^{1-\alpha} - \lambda p_X = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = (1-\alpha)AX^{\alpha}Y^{-\alpha} - \lambda p_Y = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_X X - p_Y Y = 0.$$

De las primeras dos ecuaciones:

$$\frac{\alpha A X^{\alpha-1}Y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)AX^{\alpha}Y^{-\alpha}} = \frac{\lambda p_X}{\lambda p_Y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{Y}{X} = \frac{p_X}{p_Y} \quad \Longrightarrow \quad Y = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_X}{p_Y}X.$$

(b) (2 points) Encuentre la elección óptima del consumidor (X*, Y*).

Solution:

Canastas Óptimas

Sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$p_X X + p_Y\left(\tfrac{1-\alpha}{\alpha}\tfrac{p_X}{p_Y}X\right) = m \implies p_X X\left(1 + \tfrac{1-\alpha}{\alpha}\right) = m \implies p_X X\frac{1}{\alpha} = m \implies X^* = \frac{\alpha\, m}{p_X}.$$

De forma análoga:

$$Y^* = \frac{(1-\alpha)\, m}{p_Y}.$$

Por tanto, las demandas óptimas son:

$$X^* = \frac{\alpha\, m}{p_X} = \frac{0.5 * 100}{2} = 25, \quad Y^* = \frac{(1-\alpha)\, m}{p_Y} = \frac{0.5 * 100}{1} = 50.$$

(c) (4 points) ¿Cómo cambia su elección óptima si el precio del bien X disminuye a S/.1? Grafique ambas situaciones. .5

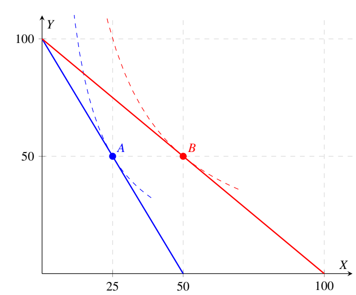
Solution:

El nuevo precio es $p'_X = 1$.

$$X^{*'} = \frac{\alpha\, m}{p_X} = \frac{0.5 * 100}{1} = 50$$

$$Y^* = \frac{(1-\alpha)\, m}{p_Y} = \frac{0.5 * 100}{1} = 50.$$

La nueva canasta óptima es (50, 50).



2. Unidad IV

Cuestión 3: Resuelva los siguientes ejercicios detalladamente [0 puntos]

(a) (10 points) La función de producción de una empresa es: $q = 4L^2(K - 5L)$.

1. Si a corto plazo K es igual a 300 unidades, ¿con qué volumen de producción la empresa logra maximizar el producto marginal del trabajo? **[4 puntos]**

Solution:

$$q = f(L, K) = 4L^2(K - 5L)$$
$$q = f(L, 300) = 4L^2(300 - 5L) = 1200L^2 - 20L^3$$
$$PMgL = \frac{dq}{dL} = 2400L - 60L^2$$

La productividad marginal será máxima cuando su primera derivada sea igual a 0:

$$\frac{d(PMgL)}{q} = 2.400 - 120L = 0 \Rightarrow L = 20$$

LA cantidad de trabajo que maximiza el producto marginal de trabajo es $L = 20$ trabajadores

$$Si \quad L = 20 \Rightarrow q = 1200(20)^2 – 20(20)^3 = 320000$$

2. Si a corto plazo K es igual a 300 unidades, ¿con cuántas unidades de trabajo la empresa alcanza el óptimo técnico? **[3 puntos]**

Solution: Para ello derivamos la producción con respecto al trabjo y igualamos a producto medio

$$q = 4L^2(K - 5L)$$
$$q = 4L^2(300 - 5L)$$
$$q = 1200L^2 - 20L^3$$
$$\text{PMe}_L = \frac{q}{L} = 1200L - 20L^2$$

La producto medio será máxima cuando su primera derivada sea nula: o $PMeL = PMgL$

$$\frac{d(PMeL)}{q} = 1200 - 40L = 0 \Rightarrow 1200 = 40L \Rightarrow L = 30$$

3. Si a corto plazo K es igual a 300 unidades, ¿con cuántas unidades de trabajo la empresa maximiza su producción? **[3 puntos]**

Solution: Para encontrar el máximo técnico en este caso, necesitamos derivar la función de producción con respecto al trabajo (L) y luego igualar la derivada a cero.
Dada la función de producción:

$$q = 4L^2K - 20L^3$$

Para encontrar el máximo técnico, derivamos q con respecto a L y luego igualamos la derivada a cero:

$$\frac{dq}{dL} = 8LK - 60L^2$$

Igualamos la derivada a cero:

$$8LK - 60L^2 = 0$$
$$8LK = 60L^2$$
$$L = \frac{8k}{60}$$

Dado que $K = 300$, entonces:

$$L = \frac{300 * 8}{60} = 40$$

Por lo tanto, la empresa alcanza el máximo técnico cuando utiliza 40 unidades de trabajo.

Cuestión 4: [0 puntos]

(a) (10 points) Complete la tabla adjunta a partir de la información de las celdas. Para ello primero haz respectivos métodos de cálculo, es decir, calcula los costos y luego rellene el cuadro.

Solution:

$$CV + CF = CT \approx 0 + 40 = 40$$

Costo Variable Medio (CVM):

$$CVM = \frac{CV}{q} = \frac{6}{1} = 6$$

Costo Medio Fijo (CMF):

$$CMF = \frac{CF}{q} = \frac{40}{1} = 40$$

Costo Medio (CM):

$$CM = \frac{CT}{q} = \frac{46}{1} = 46$$

Costo Marginal (CMg):

$$CMg = \frac{\Delta CT}{\Delta q} = \frac{CT_f - CT_i}{q_f - q_i} \approx \frac{dCT}{dq} = \frac{6-0}{1-0} = 6 \quad \text{ó} \quad \frac{46-40}{1-0} = 6$$

Estas fórmulas representan el costo medio (CM), el costo medio fijo (CMF) y el costo marginal (CMg) respectivamente, donde CT es el costo total, CF es el costo fijo total y q es la cantidad de producción.

Producción	Costo fijo	Costo Variable	Coste total	Coste fijo medio	$CVMe$	$CTMe$	CMg
0	40	0	40	-	-	-	-
1	40	6	46	40	6	46	6
2	40	11	51	20	5.5	25.5	5
3	40	15	55	13.3	5	18.33	4
4	40	20	60	10	5	15	5
5	40	26	66	8	5.2	13.2	6