

# Teoría del consumidor: elección

2 de agosto de 2016

## Teoría del consumidor

Analiza cómo un individuo **elige** la mejor **canasta de consumo** que puede adquirir **con los recursos que dispone**.

Analiza cómo un individuo **elige** el conjunto de **bienes que prefiere** (es decir, aquel que le otorga la **utilidad máxima**) sujeto a una restricción **presupuestaria**.

## Elección

Conclusión general a la que llegaremos: para **maximizar la utilidad** el individuo elegirá un conjunto de bienes, que agote su renta (recordad el supuesto de no saciedad), cuya **TMS sea igual a la ratio de precios** en el mercado de bienes.

Los **precios de mercado** son información para el individuo (costes de oportunidad). Esta es la **información clave que el individuo emplea para decidir su elección**.

## Elección

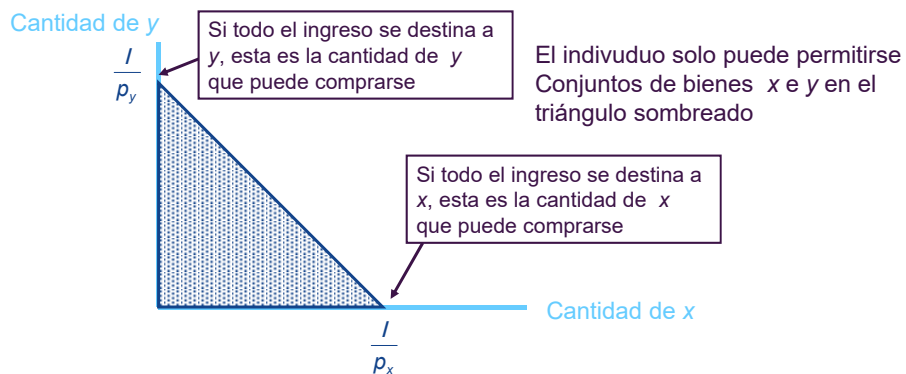
Esto es, en el caso de 2 bienes,  $x$  e  $y$ , **la TMS del bien  $x$  por el bien  $y$  para el individuo** (es decir algo personal) será igual a **la tasa a la cual los bienes  $x$  e  $y$  pueden intercambiarse entre sí en el mercado**,  $p_x/p_y$  (es decir algo determinado públicamente en el mercado).

¿Qué sucedería si estas dos magnitudes no fueran iguales? ¿P.ej.  $TMS_{xy} = 1$  y  $P_x = 2$ ,  $P_y = 1$ ?

## Análisis gráfico de la elección (para 2 bienes)

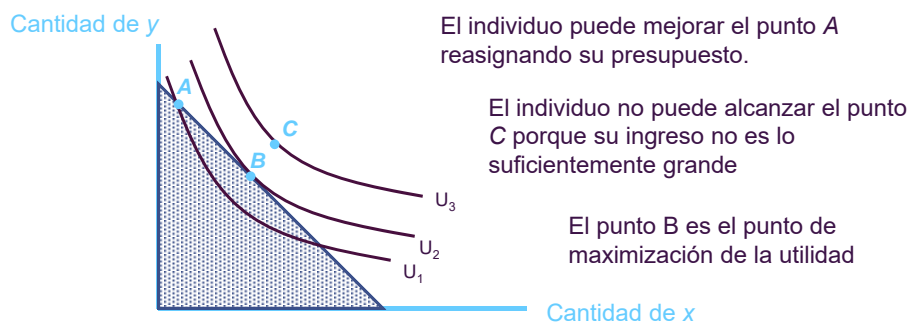
Restricción presupuestaria

$$p_x x + p_y y \leq I$$



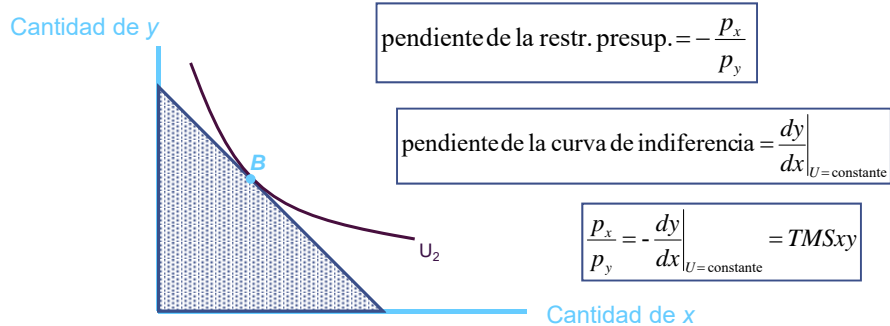
## Análisis gráfico de la elección (para 2 bienes)

Añadimos el mapa de curvas de indiferencia del individuo para representar el proceso de maximización de la utilidad



## Análisis gráfico de la elección (para 2 bienes)

La utilidad se maximiza en la tangencia entre una curva de indiferencia y la restricción presupuestaria.



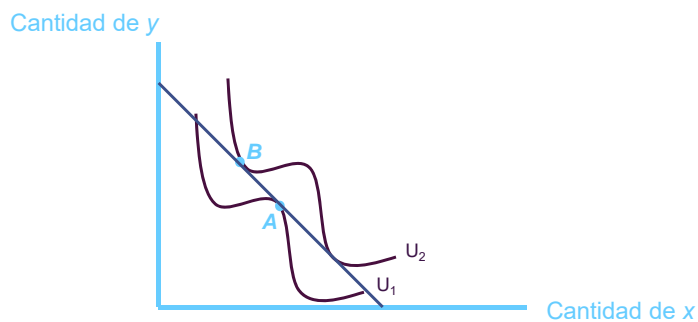
## Elección

La regla de la tangencia es necesaria y suficiente para determinar optimalidad (máxima utilidad) si estamos suponiendo que **la TMS es decreciente (convexidad estricta de las curvas de indiferencia)**.

Si no se cumple este supuesto, deberemos validar la condición de segundo orden para asegurarnos que estamos ante un máximo (evaluación del Hessiano Orlado).

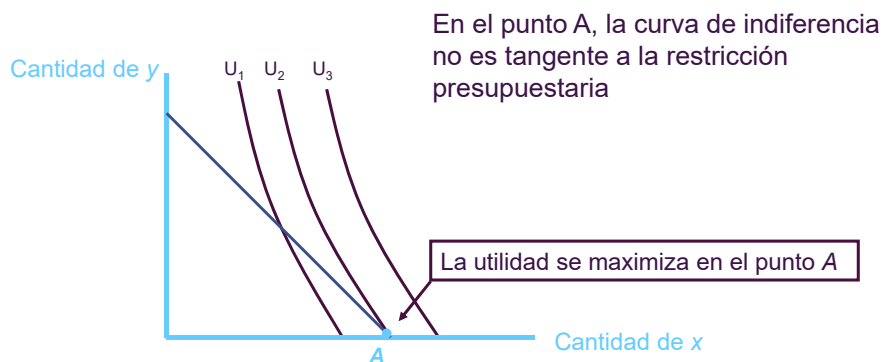
## Elección

Hay tangencia en el punto  $A$ , pero el individuo puede alcanzar un nivel más alto de utilidad en el punto  $B$ . La regla de tangencia por sí sola únicamente es condición necesaria de máximo. Necesitamos la TMS decreciente.



## Elección

**Solución esquina:** En algunas situaciones las preferencias del individuo son tales que maximiza su utilidad consumiendo únicamente uno de los bienes



## Elección para $n$ bienes

utilidad =  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$

s. a.  $I = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$  (recordad: igualdad por el supuesto de no saciedad)

Establecemos la expresión de Lagrange:

$$\mathbf{L} = U(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - \dots - p_nx_n)$$

## Elección para $n$ bienes

Condiciones de primer orden o necesarias para un óptimo interior ( $n+1$  ecuaciones):

$$\partial \mathbf{L} / \partial x_1 = \partial U / \partial x_1 - \lambda p_1 = 0$$

$$\partial \mathbf{L} / \partial x_2 = \partial U / \partial x_2 - \lambda p_2 = 0$$

⋮

$$\partial \mathbf{L} / \partial x_n = \partial U / \partial x_n - \lambda p_n = 0$$

$$\partial \mathbf{L} / \partial \lambda = I - p_1x_1 - p_2x_2 - \dots - p_nx_n = 0$$

## Elección para $n$ bienes

Esto implica:

$$\frac{\partial U / \partial x_i}{\partial U / \partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

$$TMS(x_i \text{ por } x_j) = \frac{p_i}{p_j}$$

Interpretación del multiplicador de lagrange, despejando

$\lambda$  en las ecuaciones:

$$\lambda = \frac{\partial U / \partial x_1}{p_1} = \frac{\partial U / \partial x_2}{p_2} = \dots = \frac{\partial U / \partial x_n}{p_n}$$

## Elección para $n$ bienes

Es la **utilidad marginal de la renta monetaria** (recordad que matemáticamente,  $\lambda$  es la tasa a la cual se incrementa la función objetivo cuando se incrementa el parámetro de la restricción).

Así, en el margen, el precio del bien representa la evaluación del consumidor de la última unidad consumida, lo que está dispuesto a pagar por esa última unidad:

$$p_i = \frac{\partial U / \partial x_i}{\lambda}$$

## Elección para $n$ bienes

Además **en el caso de solución esquina** (condiciones Kuhn-Tucker) el resultado va a ser:  $\partial \mathbf{L} / \partial x_i = \partial U / \partial x_i - \lambda p_i < 0$  ; por lo tanto  $x_i = 0$  y esto va a significar que:

$$p_i > \frac{\partial U / \partial x_i}{\lambda}$$

Cualquier bien cuyo precio exceda el valor marginal que tiene para el individuo, no será comprado (así, los resultados matemáticos se ajustan a la idea de que el individuo no adquiere bienes por lo cuales no creen que valga su dinero).

## Elección para una Cobb-Douglas

Función:  $U(x,y) = x^\alpha y^\beta$

Lagrangiano:  $\mathbf{L} = x^\alpha y^\beta + \lambda(I - p_x x - p_y y)$

Condiciones de Primer Orden (CPOs):

$$\partial \mathbf{L} / \partial x = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta - \lambda p_x = 0$$

$$\partial \mathbf{L} / \partial y = \beta x^\alpha y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0$$

$$\partial \mathbf{L} / \partial \lambda = I - p_x x - p_y y = 0$$

## Elección para una Cobb-Douglas

Las CPOs implican:

$$\alpha y / \beta x = p_x / p_y$$

Por conveniencia aplicamos  $\alpha + \beta = 1$   
(transformación monótona):

$$p_y y = (\beta / \alpha) p_x x = [(1 - \alpha) / \alpha] p_x x$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$I = p_x x + [(1 - \alpha) / \alpha] p_x x = (1 / \alpha) p_x x$$

## Elección para una Cobb-Douglas

Resolviendo para  $x$  e  $y$  obtenemos:

$$x^* = \frac{\alpha I}{p_x} \quad y^* = \frac{\beta I}{p_y}$$

El individuo optará por distribuir  $\alpha$  proporción de su ingreso a comprar el bien  $x$  y  $\beta$  proporción a comprar el bien  $y$ .

(Ejercicio numérico)

## Elección para una Cobb-Douglas

¿Explica una Cobb-Douglas el comportamiento real del individuo al consumir? O necesitamos una función con una forma más general que sea más útil en la explicación de las decisiones de consumo?

## Elección para una CES

Asumiendo  $\delta = 0.5$

$$U(x,y) = x^{0.5} + y^{0.5}$$

Lagrangiano:

$$L = x^{0.5} + y^{0.5} + \lambda(I - p_x x - p_y y)$$

CPOs:

$$\partial L / \partial x = 0.5x^{-0.5} - \lambda p_x = 0$$

$$\partial L / \partial y = 0.5y^{-0.5} - \lambda p_y = 0$$

$$\partial L / \partial \lambda = I - p_x x - p_y y = 0$$

## Elección para una CES

De ahí resulta que:

$$(y/x)^{0.5} = p_x/p_y$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria y resolviendo obtenemos las funciones de demanda:

$$x^* = \frac{I}{p_x \left[1 + \frac{p_x}{p_y}\right]}$$

$$y^* = \frac{I}{p_y \left[1 + \frac{p_y}{p_x}\right]}$$

## Elección para una CES

En estas funciones de demanda la participación de la renta en  $x$  o  $y$  no es una constante sino que depende del ratio de los precios.

Cuanto más alto es el precio relativo de  $x$  (o  $y$ ), más pequeña es la participación de la renta en  $x$  (o  $y$ ).

## Elección para una CES

Si  $\delta = -1$ ,

$$U(x,y) = -x^{-1} - y^{-1}$$

CPOs:

$$y/x = (p_x/p_y)^{0.5}$$

Las funciones de demanda son:

$$x^* = \frac{I}{p_x \left[ 1 + \left( \frac{p_y}{p_x} \right)^{0.5} \right]} \quad y^* = \frac{I}{p_y \left[ 1 + \left( \frac{p_x}{p_y} \right)^{0.5} \right]}$$

## Elección para una CES

Finalmente si  $\delta = -\infty$ ,

$$U(x,y) = \text{Min}(x, 4y)$$

El individuo solo elegirá combinaciones para las cuales  $x = 4y$ . Lo que significa que:

$$I = p_x x + p_y y = p_x x + p_y (x/4)$$

$$I = (p_x + 0.25p_y)x$$

## Elección para una CES

Y las funciones de demanda serán:

$$x^* = \frac{I}{p_x + 0.25p_y} \quad y^* = \frac{I}{4p_x + p_y}$$

## Función indirecta de utilidad

Podemos manipular las CPOs para obtener los valores óptimos de:  $x_1, x_2, \dots, x_n$

Estos valores óptimos dependerán de los precios de los bienes y de la renta:

$$x^*_1 = x_1(p_1, p_2, \dots, p_n, I)$$

$$x^*_2 = x_2(p_1, p_2, \dots, p_n, I)$$

⋮

$$x^*_n = x_n(p_1, p_2, \dots, p_n, I)$$

## Función indirecta de utilidad

Podemos obtener la función indirecta de utilidad a partir de esos valores óptimos de  $x$ s:

$$\text{Utilidad máxima} = U(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

Substituyendo para cada  $x_i^*$ , tenemos:

$$\text{Utilidad máxima} = V(p_1, p_2, \dots, p_n, I)$$

El nivel óptimo de utilidad dependerá indirectamente de los precios y la renta. Si estos cambian la utilidad máxima posible cambia.

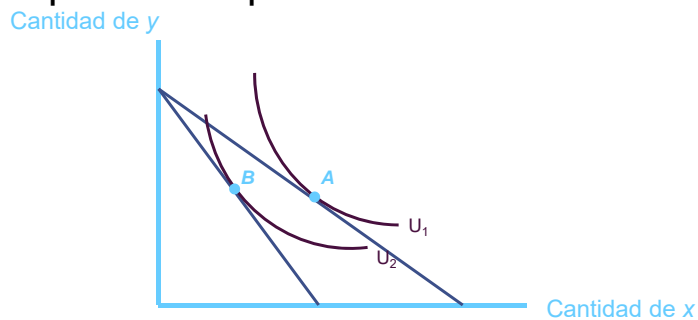
## El principio de suma global

Los impuestos sobre el poder de compra general del individuo son superiores a los impuestos sobre un bien específico.

- Un impuesto sobre la renta permite al individuo decidir libremente como asignar el resto de renta disponible.
- Un impuesto sobre un bien específico, además de reducir la capacidad de compra del individuo, distorsiona su capacidad de elección

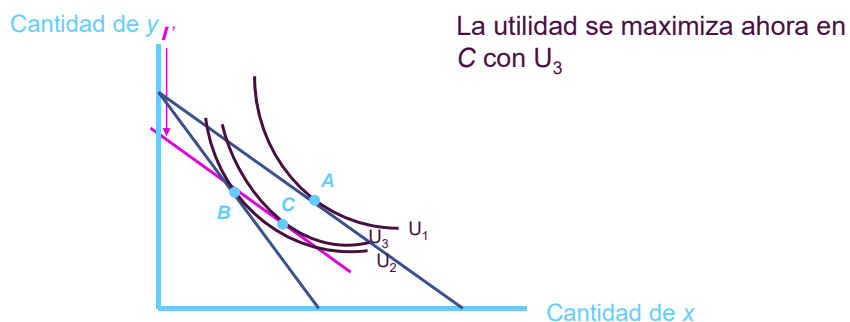
## El principio de suma global

Un impuesto sobre el bien x movería la elección de maximización de la utilidad del punto A al punto B



## El principio de suma global

Un impuesto sobre la renta que recaude la misma cantidad, movería la restricción presupuestaria a:



## Función indirecta de utilidad y el principio de suma global

Si la función de utilidad es Cobb-Douglas con  $\alpha = \beta = 0.5$ , sabemos que

$$x^* = \frac{I}{2p_x} \quad y^* = \frac{I}{2p_y}$$

Luego la función indirecta de utilidad es:

$$V(p_x, p_y, I) = (x^*)^{0.5} (y^*)^{0.5} = \frac{I}{2p_x^{0.5} p_y^{0.5}}$$

## Función indirecta de utilidad y el principio de suma global

Si ponemos un impuesto de S./ 1 en el bien X:

- El individuo comprará  $x^*=2$
- Y la utilidad indirecta caerá de 2 a 1.41

Un mismo impuesto general reducirá la renta en S./ 6:

- Y la utilidad indirecta caerá de 2 a 1.5

## Función indirecta de utilidad y el principio de suma global

Si la función de utilidad es de proporciones fijas con  $U = \text{Min}(x, 4y)$  sabemos que:

$$x^* = \frac{I}{p_x + 0.25p_y} \quad y^* = \frac{I}{4p_x + p_y}$$

Luego la función indirecta de utilidad es:

$$\begin{aligned} V(p_x, p_y, I) &= \text{Min}(x^*, 4y^*) = x^* = \frac{I}{p_x + 0.25p_y} \\ &= 4y^* = \frac{4}{4p_x + p_y} = \frac{I}{p_x + 0.25p_y} \end{aligned}$$

## Función indirecta de utilidad y el principio de suma global

Si ponemos un impuesto de S./ 1 en el bien x:

- la utilidad indirecta caerá de 4 a 8/3

Un mismo impuesto general reducirá la renta en S./ 16/3

- la utilidad indirecta caerá de 4 a 8/3

Como las **preferencias** son **rígidas**, el **impuesto en el bien no distorsiona la elección**.

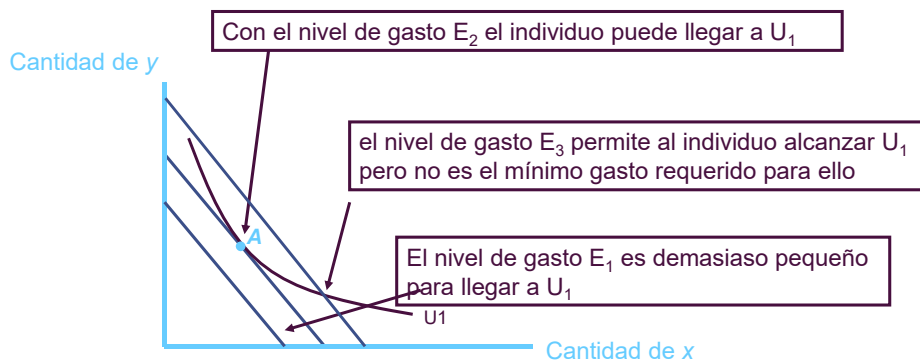
## Minimización del gasto

El problema de la minimización dual asociado a la maximización de la utilidad:

- Consiste en distribuir el ingreso de tal manera que sea posible alcanzar un nivel de utilidad dado con el gasto mínimo.
- Por lo tanto objetivos y restricción del problema se invierten.

## Minimización del gasto

El punto A es la solución del problema dual



## Minimización del gasto

De manera más formal y para  $n$  bienes:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  el problema del individuo es minimizar:

El gasto total =  $E = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$

Sujeto a la restricción:

utilidad =  $U_1 = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Las cantidades óptimas de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dependerán de los precios de los bienes y del nivel de utilidad requerido.

## Minimización del gasto

La función de gasto del individuo muestra los gastos mínimos necesarios para alcanzar el nivel de utilidad dado, para una serie particular de precios:

Gastos mínimos =  $E(p_1, p_2, \dots, p_n, U)$

Por lo tanto la función de gasto y la función indirecta de utilidad están relacionadas inversamente ambas dependen de los precios de mercado pero implican diferentes restricciones (ingreso o utilidad)

## Minimización del gasto

La función indirecta de utilidad en el caso Cobb-Douglas para dos bienes es:

$$V(p_x, p_y, I) = \frac{I}{2p_x^{0.5} p_y^{0.5}}$$

Si intercambiamos el rol de utilidad e ingreso (gasto) tenemos la función de gasto:

$$E(p_x, p_y, U) = 2p_x^{0.5} p_y^{0.5} U$$

39

## Minimización del gasto

Para el caso de las proporciones fijas (complementos perfectos) la función de utilidad era:

$$V(p_x, p_y, I) = \frac{I}{p_x + 0.25p_y}$$

Si nuevamente intercambiamos el rol de utilidad e ingreso (gasto) tenemos la función de gasto:

$$E(p_x, p_y, U) = (p_x + 0.25p_y)U$$

40

## Minimización del gasto

Propiedades de las funciones de gasto:

-Homogéneas de grado 1 (doblar los precios requerirá doblar el gasto)

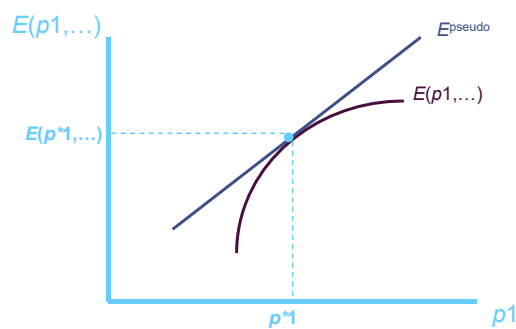
-No decrecientes en precios:

$$\partial E/\partial p_i \geq 0 \text{ para todo bien } i$$

-Cóncavas en precios.

## Minimización del gasto

Para  $p^*1$ , el individuo gasta  $E(p^*1, \dots)$



Si sigue comprando el mismo conjunto de bienes conforme  $p^*1$  cambia, su función de gasto sería  $E^{pseudoe}$

Dado que realmente su patrón de consumo se ajustará, sus gastos reales serán menores que  $E^{pseudoe}$

## Resumen

TMS igual a razón de precios (condición de tangencia) Para que la condición de tangencia no solo sea necesaria sino suficiente, TMS debe ser decreciente.

Soluciones esquina.

Función indirecta de utilidad.

Función de gasto.

## Resumen

TMS igual a razón de precios (condición de tangencia) Para que la condición de tangencia no solo sea necesaria sino suficiente, TMS debe ser decreciente.

Soluciones esquina.

Función indirecta de utilidad.

Función de gasto.

## Ejercicios

4. 5, 4.7 y 4.8 (solución vista en clase)

4.13:

- a. Solución vista en clase.
- b.  $V$  no cambia si multiplicamos precios y renta (por ejemplo) por 2.
- c.  $\partial V/\partial I > 0$  (inmediato)
- d.  $\partial V/\partial p_x, \partial V/\partial p_y < 0$  (inmediato)
- e. Simplemente hay que intercambiar  $I$  por  $V$ .
- f. Si multiplicamos los precios por 2 se dobla el gasto.
- g. Tomando derivadas parciales sale inmediato.
- h. Para el precio de  $x$ :  $\partial E/\partial p_x > 0, \partial^2 E/\partial^2 p_x < 0$ . Lo mismo para el precio de  $y$ .